Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 5 — 1. November 2022

Aufgabe 1: *(3+1 Punkte)* Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

(a) Zeige per Induktion: Für alle $m, k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq m + n$ gilt

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell} \binom{n}{k-\ell}.$$

(b) Folgere aus Aufgabenteil (a) die Allgemeingültigkeit der Aussage

$$\binom{2n}{n} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{l}^2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2: *(2+1+1+2 Punkte)*
In dieser Aufgabe diskutieren wir Umgebungen von Punkten in metrischen Räumen.

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset X$ wird als *Umgebung* eines Punktes $x_0 \in U$ bezeichnet, falls eine offene Menge $V \subset U$ mit $x_0 \in V$ existiert.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, $U \subset X$ eine Teilmenge von X und $x_0 \in U$. Zeige, dass U genau dann eine *Umgebung* von $x_0 \in U$ ist, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B(x_0, \varepsilon) \subset U$.

(b) Zeige, dass die Äquivalenz in (a) weiterhin gilt, wenn in der dortigen Formulierung *abgeschlossene* Kugeln $B[x_0, \varepsilon] \subset U$ statt offener Kugeln $B(x_0, \varepsilon) \subset U$ verlangt werden.

(c) Zeige, dass eine Teilmenge $O \subset X$ in einem metrischen Raum (X, d) genau dann offen ist, wenn O eine Umgebung von allen Punkten $x_0 \in O$ ist.

(d) Betrachte die folgenden Teilmengen des metrischen Raums $(\mathbb{R}, d)$ mit Betragsmetrik d.

$$M_1 = [5, \infty), \qquad M_2 = \{4\} \cup ([5, 7) \backslash \{6\}), \qquad M_3 = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1 + 1/n).$$

Für welche ihrer Punkte sind $M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{R}$ Umgebungen und für welche nicht?

Ausgabedatum: 1. November 2022 **Abgabetermin:** 7. November 2022, 10:00 Uhr.